

APONTAMENTOS
DE
GEOMETRIA
POR

Antonio FERREIRA DE ABREU

OFFICIER D'ACADÉMIE (Governo Francez, 1904)

OFFICIER DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (Governo Francez, 1909)

DOCENTE DA ESCOLA NORMAL DO DISTRICTO FEDERAL

(2.^a Edição, muito augmentada)



Grande Livraria Leite Ribeiro
Ruas Bathencourt da Silva, 15, 17 e 19
(ant. São Antonio)
e 13 de Maio ns. 74 e 76
RIO DE JANEIRO
1921

APONTAMENTOS
DE
GEOMETRIA

POR
Antonio FERREIRA DE ABREU

OFFICIER D'ACADÉMIE (Governo Francez, 1904)

OFFICIER DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (Governo Francez, 1909)

DOCENTE DA ESCOLA NORMAL DO DISTRITO FEDERAL

(2.^a Edição, muito augmentada)



Grande Livraria Leite Ribeiro
Ruã Bethencourt da Silva, 15, 17 e 19,
Jard. São Amaral
« 13 de Maio n.^o 74 e 76
RIO DE JANEIRO
1921

Approved pela DIRECTORIA GERAL DE
INSTRUÇÃO PUBLICA DO DISTRICTO FEDERAL
(despacho de 24 de Maio de 1920).

Approved pelo GOVERNO DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO (despacho do Secretario Geral
do Estado do Rio de Janeiro, de 10 de Julho de
1920).

Approved pela Congregação da ESCOLA
NAVAL (despacho do Ministro da Marinha, de
15 de Dezembro de 1920).

1ª PARTE

Definições

Chama-se **VOLUME** toda porção limitada do espaço.

Chama-se **ESPAÇO** o meio em que se move a terra e todos os outros astros.

O que separa o volume do resto do espaço é uma **SUPERFICIE**.

Quando duas superficies se encontram, sua parte commum é uma **LINHA**.

Quando duas linhas se encontram, sua parte commum é um **PONTO**.

Os volumes, superficies e linhas, chamam-se **FIGURAS**.

A geometria é a sciencia da extensão: é a sciencia que tem por objecto o estudo das propriedades das figuras, e por fim especial a medida da sua extensão.

Diz-se que duas figuras são **IGUAES**, quando coincidem em toda sua extensão.

Dois figuras são **SEMELHANTES**, quando têm a mesma forma, sem terem as mesmas dimensões.

Por menor que seja um corpo, elle estende-se em todos os sentidos; consideram-se habitualmente tres dimensões: **COMPRIMENTO**, **LARGURA** e **ALTURA**, chamada, ás vezes, **ESPESSURA** ou **PROFUNDIDADE**.

O **VOLUME** é a extensão considerada sob tres dimensões.

A **SUPERFICIE** é a extensão considerada sob duas dimensões.

A **LINHA** é uma extensão considerada sob uma só dimensão.

A mais simples das linhas é a **LINHA RECTA**. (*)

(*) Segundo o Dr. Friedrich Reidt, professor do Gymnasio de « Hamm », a linha recta não pôde ser definida. Da idéa de « direcção » segue-se a de linha recta.

cuja propriedade é ser a mais curta distancia entre dois quaesquer de seus pontos.

De um ponto a outro, só se pôde traçar uma linha recta; duas linhas rectas, tendo dois pontos communs, coincidem em toda sua extensão.

Chama-se LINHA QUEBRADA ou POLYGONAL, a linha formada por varias linhas rectas, e LINHA CURVA, a que não é nem recta nem quebrada.

Tambem podemos considerar a linha curva como sendo o limite para o qual tende uma linha polygonal de um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos.

Chama-se SUPERFICIE PLANA ou PLANO, toda superficie sobre a qual, sendo tomados dois pontos arbitra-rios, a linha recta, que une estes dois pontos, se acha inteiramente contida.

Uma superficie POLYEDRICA ou QUEBRADA é uma superficie formada por varios planos differentes.

Uma superficie, que não é nem plana nem polyedrica, é uma SUPERFICIE CURVA.

Tambem podemos considerar a superficie curva como sendo o limite de uma superficie polyedrica de um numero infinitamente grande de faces infinitamente pequenas.

Um ÂNGULO é a figura formada por duas rectas que se encontram. O ponto de encontro se chama



VERTICE do angulo: as duas rectas são os LADOS do angulo.

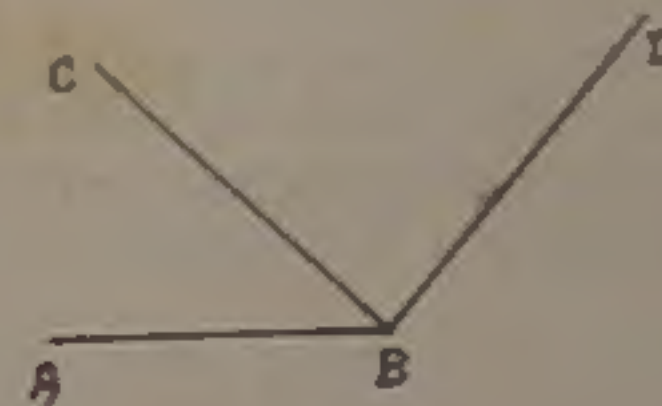
Assim, as duas rectas AB e AC formam um angulo tendo seu vertice em A.

Um angulo se designa pela letra do vertice, ou por tres letras, tendo o cuidado de collocar a letra do vertice no meio. Logo, dir-se-ha o angulo A, ou o angulo BAC.

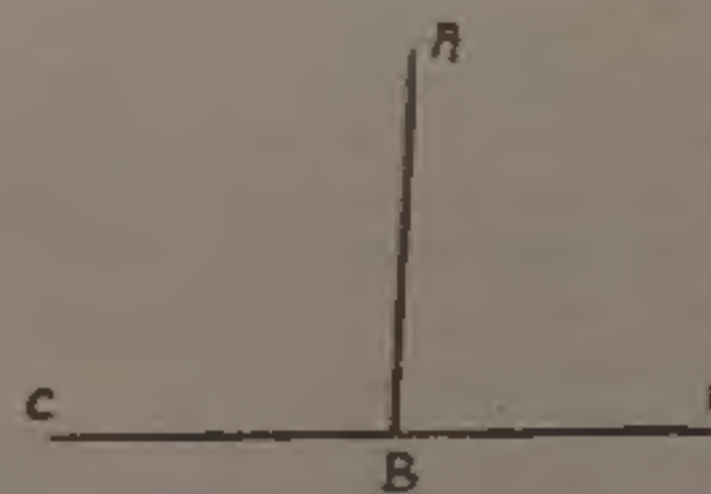
Esta ultima denominação deve ser necessariamente empregada, se existem dois ou mais angulos tendo seu vertice no mesmo ponto.

O tamanho de um angulo não depende do comprimento dos seus lados, que se deve supôr prolongados infinitamente, mas sim do seu afastamento.

Quando dois angulos têm um vertice commum e um lado commum intermediario, diz-se que são ADJACENTES; taes são os angulos ABC, CBD.



Uma linha recta AB é PERPENDICULAR sobre uma outra recta CD, quando fórma com esta dois angulos



adjacentes, ABD e ABC, iguaes. Estes angulos chamam-se ÂNGULOS RECTOS.

Se uma recta fórma com uma outra dois angulos adjacentes desiguaes, diz-se que é OBLIQUA em relação a esta.

Um angulo menor do que um angulo recto é um ANGULO AGUDO; um angulo maior do que um angulo recto é um ANGULO OBTUSO.

Dois angulos são COMPLEMENTARES, quando sua somma vale um recto, e SUPPLEMENTARES, quando sua somma vale dois rectos.

Chamam-se PARALLELAS duas rectas que, situadas no mesmo plano, não se encontram por mais que se as prolongue.

Chamam-se ANGULOS OPPOSTOS PELO VERTICE, dois angulos taes que os lados de um delles estejam no prolongamento dos lados do outro.

A BISSECTRIZ (bis, secare) de um angulo, é a recta que, passando pelo vertice, divide o angulo ao meio.

Uma figura plana, limitada de todos os lados por linhas rectas, é um POLYGONO; o conjuncto dessas linhas é o PERIMETRO do polygono.

Um polygono é CONVEXO quando não pôde ser cortado por nenhuma recta em mais de dois pontos. Tambem chamamos SUPERFICIES CONVEXAS ás que não podem ser cortadas por nenhuma secante em mais de dois pontos.

Uma linha quebrada ou curva que não é plana, isto é, que não tem todos os seus pontos situados no mesmo plano, chama-se LINHA REVERSA.

Um TRIANGULO é um polygono de tres lados. Distingue-se entre os triangulos: o EQUILATERO, o ISOSCELES, o RECTANGULO e o ESCALENO.

O primeiro tem os tres lados iguaes; o segundo tem somente dois lados iguaes; o terceiro tem um angulo recto: neste ultimo, o lado opposto ao angulo recto, chama-se HYPOTENUSA, e os lados adjacentes ao angulo recto, chamam-se CATHETOS.

O triangulo escaleno é um triangulo qualquer, com lados e angulos quaesquer.

Chama-se BASE de um triangulo, um qualquer dos seus tres lados. No triangulo isosceles toma-se habitualmente por base o lado que não é igual aos dois outros.

Um QUADRILATERO é um polygono de quatro lados. Entre os quadrilateros distinguimos:

o QUADRADO, que tem seus quatro lados iguaes e seus angulos rectos;

o RECTANGULO, que tem seus angulos rectos, sem ter os lados iguaes;

o PARALLELOGRAMMO, cujos lados oppostos são parallelos;

o LOSANGO, que tem seus lados iguaes, sem ter os angulos rectos;

o TRAPEZIO, em que dois lados, somente, são parallelos.

Chama-se DIAGONAL de um polygono a linha recta que une os vertices de dois angulos deste polygono não adjacentes ao mesmo lado.

AXIOMA é uma verdade evidente por si mesma.

THEOREMA é uma verdade que precisa de uma explicação, de um raciocinio, que chamamos DEMONSTRAÇÃO.

COROLLARIO é uma consequencia de um theorema.

O enunciado de um theorema compõe-se de duas partes:

a HYPOTHESE ou supposição, e a CONCLUSÃO ou THESE.

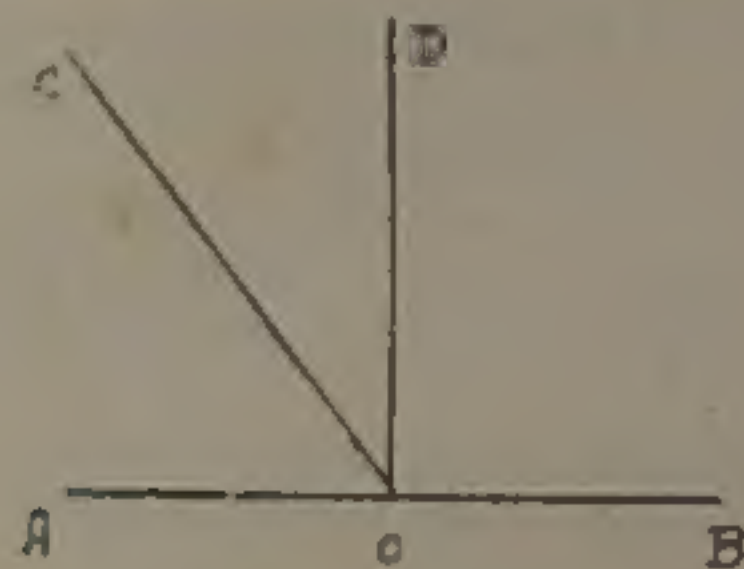
Trocando, no enunciado de um theorema, a hypothese pela conclusão, e a conclusão pela hypothese, forma-se a RECIPROCA do primeiro theorema.

A reciproca nem sempre é verdadeira: por exemplo, todos os angulos rectos são iguaes, mas nem todos os angulos iguaes são rectos.

Designa-se sob o nome commum de PROPOSIÇÕES aos theoremas e tambem aos PROBLEMAS, isto é, ás questões que pretendemos resolver.

Perpendiculares e Obliquas

Theorema 1.— D'um ponto O tomado sobre uma recta AB, podemos traçar uma perpendicular, e uma só.

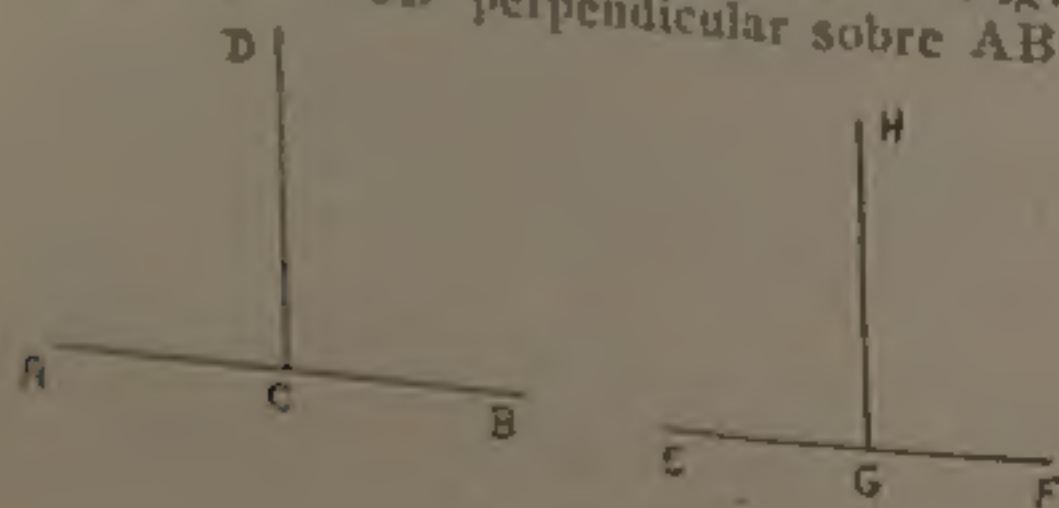


Tracemos pelo ponto O uma recta OC qualquer, fazendo com AB dois angulos desiguaes, e seja AOC o menor destes dois angulos.

Se fazemos girar a recta OC em torno do ponto O até que venha applicar-se sobre OB, haverá um momento em que o angulo AOC será maior do que o angulo COB. Logo, haverá uma posição OD da recta, na qual ella fará com AB dois angulos iguaes: OD será, pois, perpendicular sobre AB.

Outrosim, OD é a unica perpendicular que se possa traçar pelo ponto O sobre AB; pois, por pouco que OD incline para um lado ou para o outro, a igualdade dos angulos DOA e DOB desaparece, e OD deixa de ser perpendicular.

Corollario: — Todos os angulos rectos são iguaes. Sejam a recta CD perpendicular sobre AB, e a

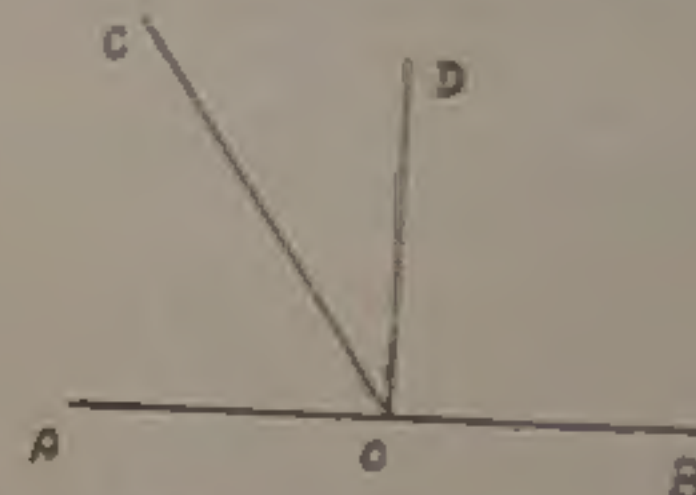


recta GH perpendicular sobre EF: digo que o angulo recto FGH é igual ao angulo recto BCD.

Appliquemos EF sobre AB de tal modo que o ponto G caia em C: como, de um ponto sobre uma recta só se pôde traçar uma perpendicular sobre esta recta, GH tomará a direcção CD, e os angulos FGH e BCD coincidirão.

Theorema 2.— Quando uma recta OC encontra uma outra AB, aquella fórma com esta dois angulos adjacentes, COA e COB, supplementares.

Tracemos a perpendicular OD sobre AB. O angulo BOC vale um recto, mais o angulo DOC: logo os

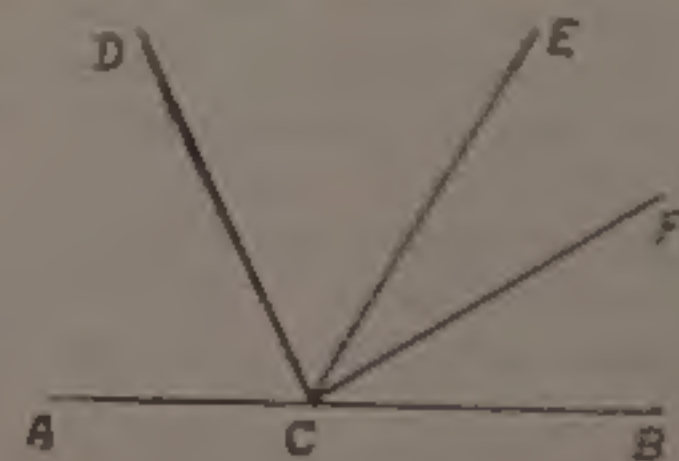


angulos BOC e COA valem juntos um angulo recto mais a somma dos angulos DOC e COA.

Ora, esta ultima somma é igual ao angulo recto DOA: logo, a somma dos angulos BOC e COA é igual a dois rectos.

Corollario: — Quando um dos angulos formados pela recta OC com AB é recto, o outro angulo tambem o é.

Corollario: — A somma dos angulos formados



de um mesmo lado de uma recta AB, por varias rectas traçadas do mesmo ponto C, é igual a dois angulos rectos.

Com effeito, o ângulo DCB, ~~com~~ somma dos ângulos DCE, ECF e FCB, é o suplemento do ângulo ACD.

Reciprocamente— Quando dois ângulos adjacentes ABC e CBD são suplementares, seus lados exteriores estão em linha recta

$$ABC + CBD = 2 \text{ rectos.}$$

Se BD não estivesse no prolongamento de AB, e fosse BE esse prolongamento: teríamos

$$ABC + CBE = 2 \text{ rectos}$$

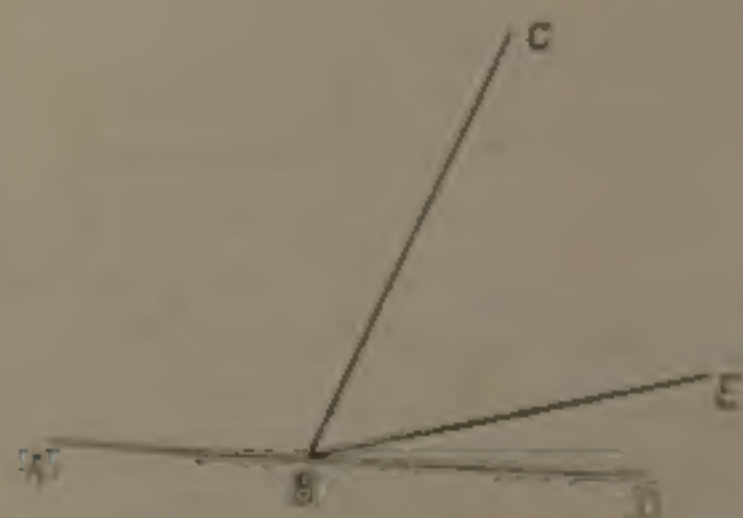
logo,

$$ABC + CBD = ABC + CBE$$

ou, suprimindo o termo commum ABC, fica

$$CBD = CBE$$

E' preciso, pois, que BD coincida com BE para que esta igualdade persista.



Ora, BE, por construção, estando no prolongamento de AB, é claro que o mesmo acontecerá a BD.

Para obter-se o suplemento de um ângulo dado, basta prolongar um de seus lados além do vertice.

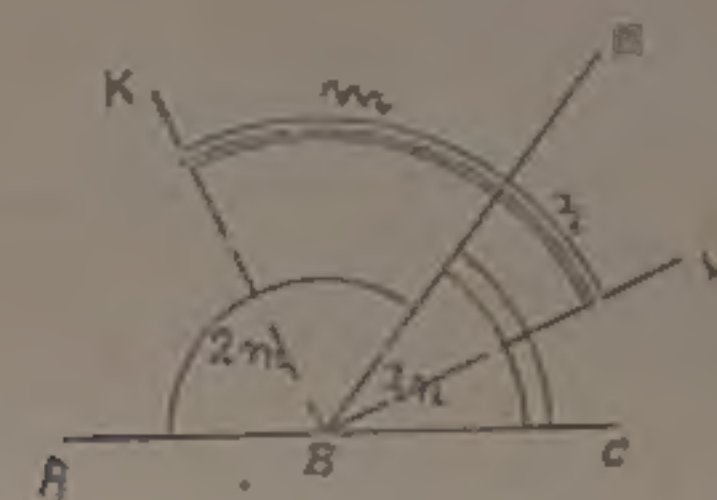
Para ter-se o complemento de um ângulo, basta traçar no vertice uma perpendicular a um dos lados.

A somma de todos os ângulos que se podem formar em torno de um ponto, num plano, vale 4 rectos.

Quando duas rectas se cortam de modo que um dos quatro ângulos seja recto, os tres outros tambem o são.

Se uma recta é perpendicular a uma outra, esta tambem é perpendicular áquella.

Se dois ângulos adjacentes são suplementares, as suas bissectrizes são orthogonaes. (*)

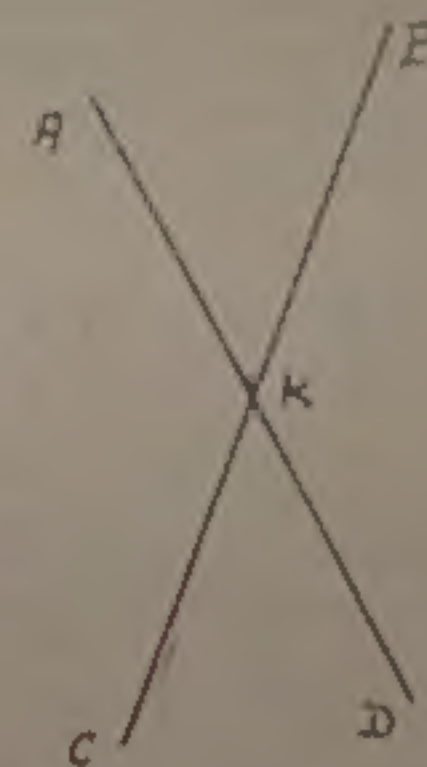


$$2m + 2n = 2r$$

$$m + n = 1 \text{ recto}$$

$$\text{logo, } KBV = 1 \text{ recto.}$$

Theorema 3.—Os ângulos oppostos pelo vertice são iguaes.



$$AKB + AKC = 2 \text{ rectos}$$

$$CKD + AKC = 2 \text{ rectos}$$

logo,

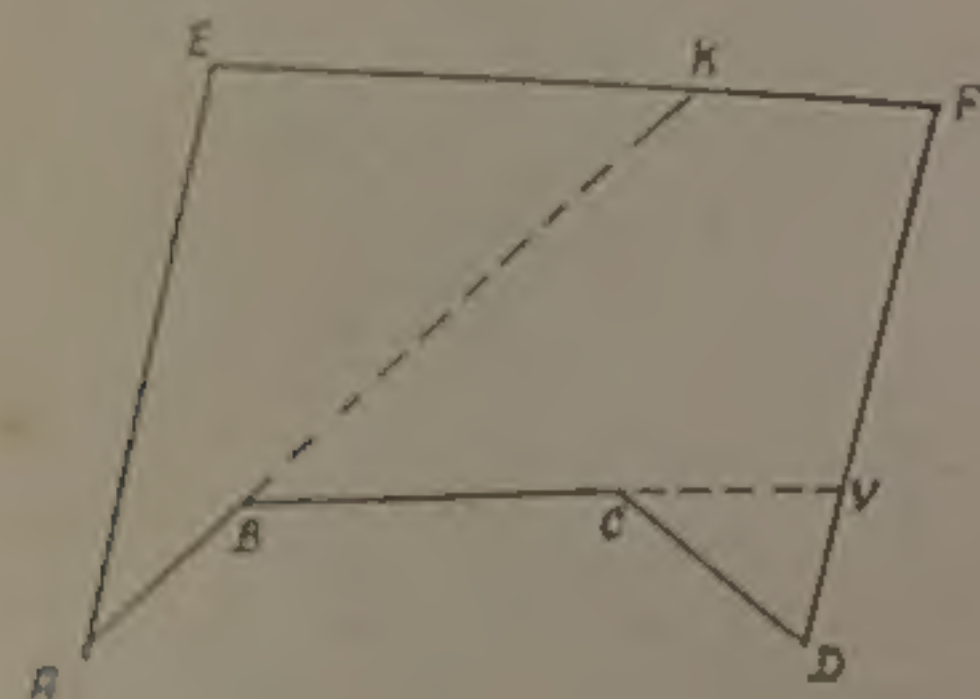
$$AKB + AKC = CKD + AKC$$

ou

$$AKB = CKD$$

(*) Duas rectas são orthogonaes quando uma é perpendicular á outra.

Theorema 4. — Uma linha polygonal convexa é maior do que toda linha envolvente que tenha as mesmas extremidades do que a primeira.



Seja a linha polygonal ABCD, e uma outra, AEFD, também polygonal, porém, envolvendo a primeira.

Sejam A e D as extremidades communs. Prolonguemos AB até K, e BC até V.

Temos

$$AB + BK = AE + EK$$

$$BC + CV = BK + KF + FV$$

$$CD + CV = VD$$

Somando membro a membro estas tres desigualdades de mesmo sentido, achamos:

$$AB + BK + BC + CV + CD = AE + EK + BK + KF + FV + CV + VD$$

Eliminando as partes communs BK e CV, vem:

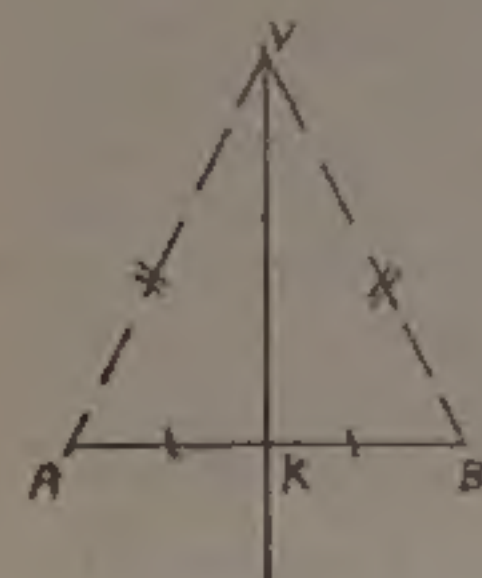
$$AB + BC + CD = AE + EK + KF + FV + VD$$

ou

$$AB + BC + CD = AE + EF + FD$$

Logo, GEOMETRICO é um conjunto de pontos que gozam de uma certa propriedade, á exclusão de todos os outros pontos.

Theorema 5. — A perpendicular, traçada pelo meio de uma recta limitada, é o logar geometrico dos pontos do plano que distam igualmente das extremidades da recta considerada.



Seja AB uma recta limitada, K o meio de AB, e KV a perpendicular em K. Unindo o ponto V ao ponto A e ao ponto B, digo que $VA = VB$.

Considerando a parte VKB da figura, fazendo-n'a girar em torno de VK como eixo, os angulos em K sendo iguaes, KB tomará a direcção KA, e, como por hypothese $KB = KA$, o ponto B cairá em A: logo, VB coincidirá com VA.

Se tomassemos o ponto V fóra da perpendicular, as distancias VB e VA seriam desiguaes.

O ponto V estando fóra da perpendicular, uma das suas distancias ás extremidades A e B, cortará a perpendicular. No caso da figura é VA que corta a perpendicular. Já demonstramos que o ponto K situado sobre a perpendicular distava igualmente de A e de B. Logo,

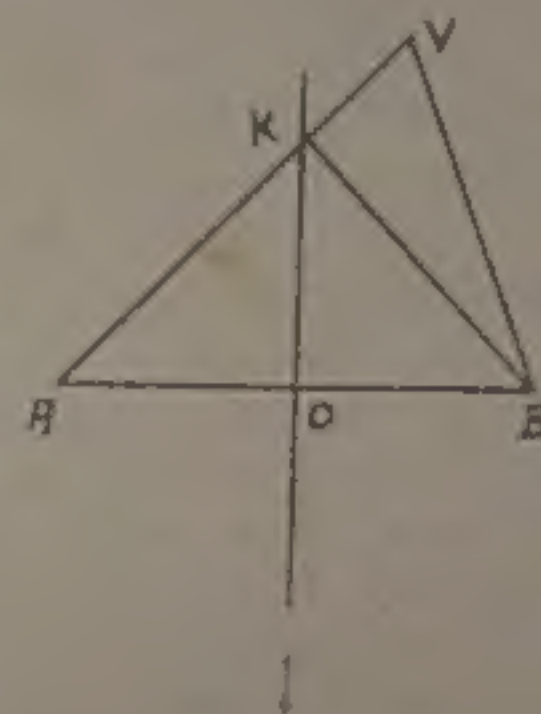
$$KA = KB$$

Mas,

$$VB < VK + KB$$

$$VB < VK + KA$$

$$VB < VA$$



Theorema 6. — D'un ponto tomado fóra de uma

recta, podemos traçar uma perpendicular sobre esta recta, e uma só.

Seja um ponto K fóra da recta AB. Traço uma obliqua qualquer KA, fazendo com AB um angulo m; do ponto A, traço, para baixo de AB, a recta AV, que forme com AB um angulo igual ao angulo m. Tomo AV igual a AK; uno KV.

Digo que KV é perpendicular sobre AB.

Fazendo girar a porção AOK da figura em torno de AB como eixo, os angulos em A sendo iguaes, AK tomará a direcção AV, e como AK = AV, o ponto K cairá em V. Como nessa giração o ponto O estava no eixo, OK veio coincidir com OV. Logo os angulos KOA e VOA são iguaes: OA é perpendicular sobre KV, e tambem KV é perpendicular sobre AB.

Digo que KV é a unica perpendicular que se possa traçar do ponto K sobre AB.

Se KA fosse perpendicular, os angulos em A seriam rectos, e KAO e OAV seriam angulos adjacentes supplementares, teriam, pois, seus lados exteriores em linha recta. Ora, já traçamos KV, linha recta de K a V: é indispensavel, pois, que KAV coincida com KOV.

Logo, a recta KA, que supponmos fosse tambem perpendicular sobre AB, coincide com KO.

Logo, ha só uma perpendicular

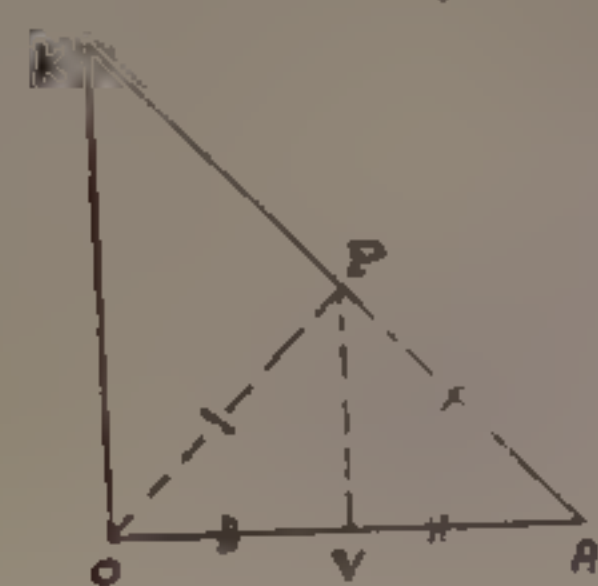
Theorema 7. — Dado um ponto fóra de uma recta, ha só uma perpendicular e varias obliquas:

1.ª A perpendicular é menor do que qualquer obliqua;

2.ª Das obliquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular, são iguaes;

3.ª De duas obliquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular, a que se afasta mais, é a maior.

1.ª Seja KO a perpendicular e KA a obliqua. Vou demonstrar que KO é menor do que KA. Tomo



V, traço a perpendicular VP; já sabemos que

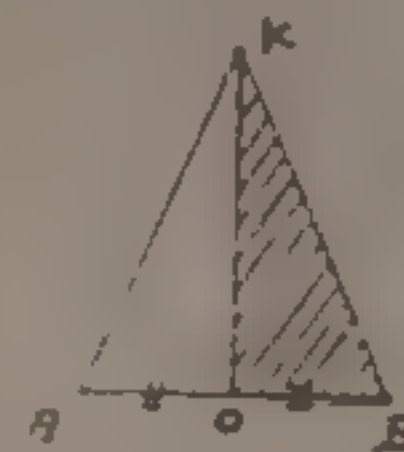
$$PA = PO$$

$$\text{mas } KO < KP + PO$$

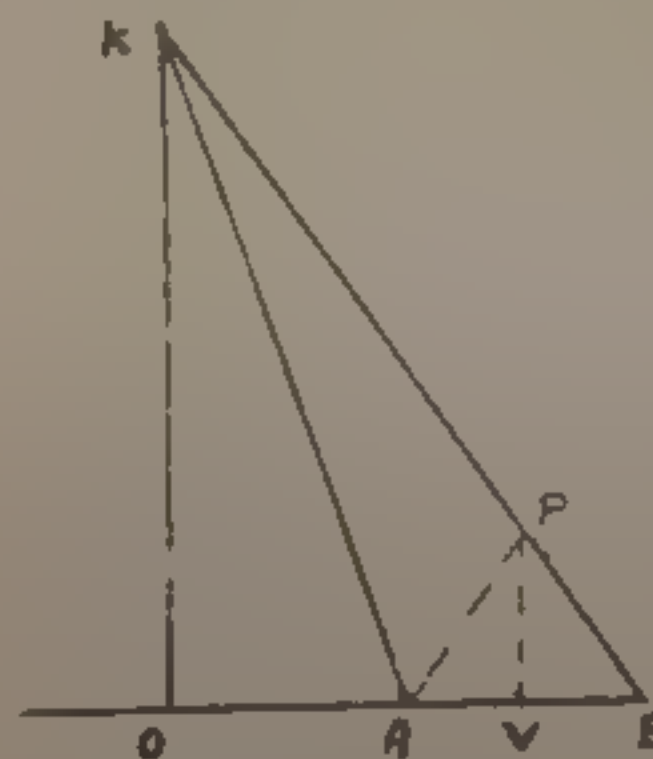
$$\text{ou } KO < KP + PA$$

$$\text{ou } KO < KA$$

2.ª Sejam KA e KB duas obliquas taes que OA = OB. Já sabemos que KA = KB, pois, o ponto K pertence á perpendicular no meio de AB.



3.ª Sejam KA e KB duas obliquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular.



Tomemos o meio V, de AB; deste ponto tracemos VP.

Já sabemos que PA = PB.

Ora,

$$KA < KP + PA$$

$$KA < KP + PB$$

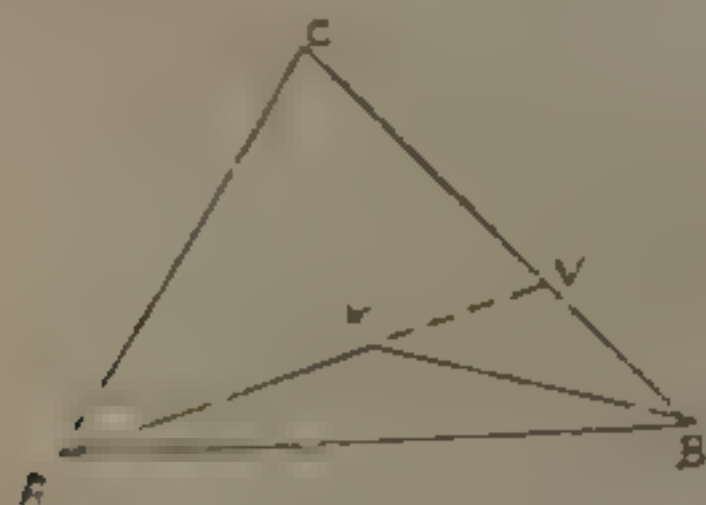
$$KA < KB$$

As obliquas iguaes formam angulos iguaes com a perpendicular.

A mais curta linha que se possa traçar de um ponto a uma recta, é a perpendicular a esta recta. D'um ponto a uma recta só se pôdem traçar duas obliquas iguaes.

Theorema 8. — A somma das distancias d'um ponto K, tomado no interior d'um triangulo, ás ex-

Terminados os dois primeiros, resta fazer o terceiro, que é o mesmo que o primeiro, mas com os dois outros lados do triângulo.



Seja o ponto K no interior do triângulo ABC:
triângulo AKV.

$$AK + KV + VA = \text{perímetro do triângulo AKV}$$

Seja o triângulo BCK:

$$BK + KV + VB = \text{perímetro do triângulo BCK}$$

Seja o triângulo ACK:

$$AK + KB = AC + CV + VB$$

$$AK + KB = AC + CB$$

De um modo análogo, demonstrariamos que o perímetro de um polígono qualquer é menor do que o perímetro d'um outro polígono envolvendo o primeiro.

Triângulos

Um triângulo é uma figura plana limitada por tres rectas; é o mais simples dos polygonos.

Num triângulo devemos considerar seis elementos: tres angulos e tres lados.

Chama-se **MEDIANA** a recta que une um vertice de um triângulo ao meio do lado opposto. Em todo triângulo ha tres medianas.

ALTURA de um triângulo é a perpendicular traçada de um vertice sobre o lado opposto. (Póde acontecer que a altura caia no prolongamento do lado opposto.) Em todo triângulo ha tres alturas.

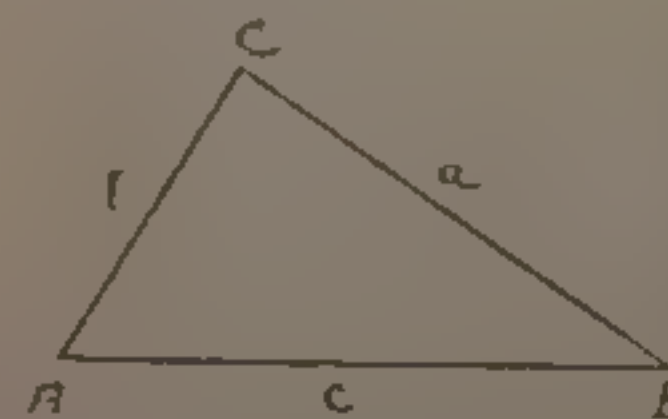
Já vimos o que é **BISSECTRIZ**. O triângulo, tendo tres angulos, terá tres bissectrizes.

Ainda podemos indicar uma linha interessante: é a **SYMEDIANA**, symetrica da mediana em relação á bissectriz. Depois de havermos estudado a circumferencia daremos a construcção da symediana.

Em todo triângulo ha tres symedianas: ellas se cortam num mesmo ponto, chamado **PONTO DE LEMOINE**, e representa-se habitualmente pela letra K. Dir-se-ha, pois, ponto de Lemoine, ou ponto K.

As perpendiculares traçadas pelos meios dos lados de um triângulo são as tres **MEDIATRIZES** do triângulo. Demon-traremos, em momento opportuno, que ellas se cortam num mesmo ponto (o centro do circulo circumscripto ao triângulo).

Theorema 9.—Cada lado de um triângulo é menor do que a somma dos dois outros e maior do que a sua differença.



Seja o triângulo ABC. Convencionaremos chamar os lados oppostos a A, B e C pelas letras *a*, *b* e *c* respectivamente.

Veremos agora

que a linha recta, é menor do que a linha quebrada CAB que tem as mesmas extremidades:

$$CB < CA + AB$$

$$a < b + c$$

Subtraindo b a ambos os membros desta desigualdade, achamos:

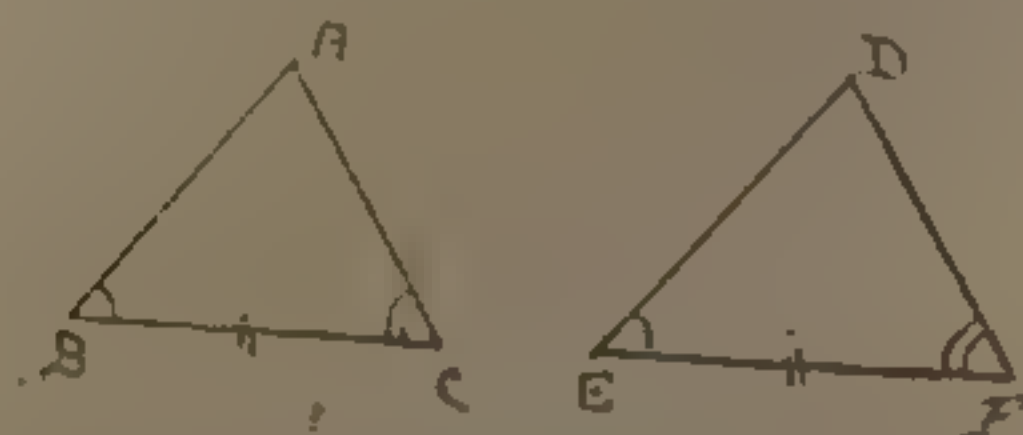
$$a - b < b + c - b$$

$$\text{ou } a - b < c$$

$$\text{ou } c > a - b$$

1º caso d'igualdade. — Dois triangulos são iguaes quando têm um lado igual adjacente a angulos respectivamente iguaes.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF, tendo o lado $BC = EF$, o angulo $B = E$ e o angulo $C = F$.



Collocando BC sobre EF de modo que o ponto B caia em E e o ponto C em F, os angulos B e E sendo iguaes, os lados BC e EF, tendo a mesma direcção, e o ponto C sendo igual ao angulo F, CA tomará a direcção de FD; o ponto A deve, pois, cair ao mesmo tempo nas direcções ED e FD; logo, é claro, que A coincidirá com D. Os dois triangulos, coincidindo em toda a sua extensão, são iguaes.

2º caso d'igualdade. — Dois triangulos são iguaes quando têm um angulo igual, comprehendido entre lados respectivamente iguaes.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF, tales que o angulo $B = E$, e os lados $AB = DE$, e $BC = EF$.

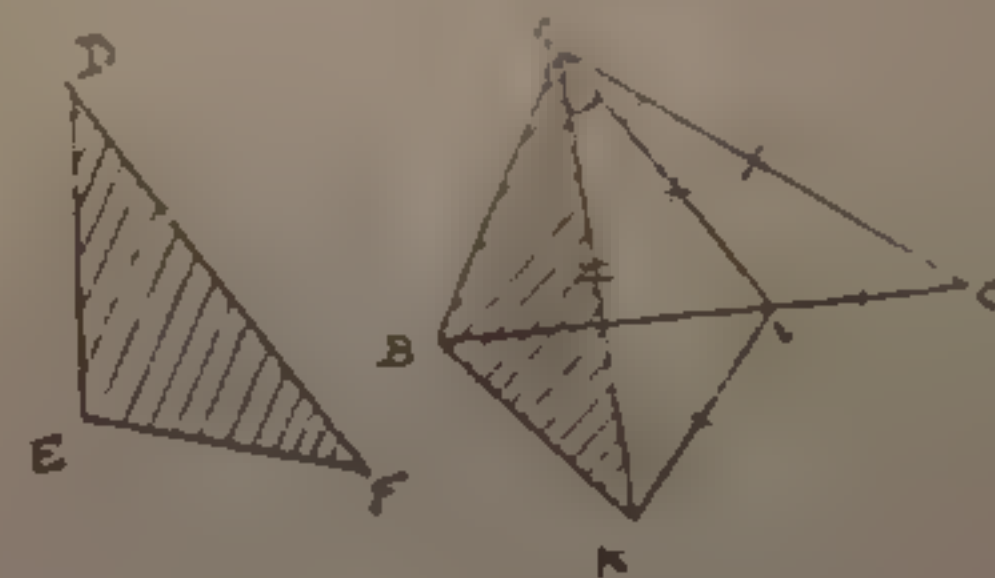


Collocando BC sobre EF de modo que B caia em E e o ponto C em F, os angulos B e E sendo iguaes, os lados AB e DE, tendo a mesma direcção, e o ponto A cahir em D; logo AC coincide com DF, e os triangulos, coincidindo em toda a sua extensão, são iguaes.

Theorema 10. — Se dois triangulos têm dois lados respectivamente iguaes, porém o angulo comprehendido entre os dois lados do primeiro menor do que o angulo comprehendido entre os dois lados do segundo, o terceiro lado do primeiro será menor do que o terceiro lado do segundo.

Sejam os dois triangulos DEF e ABC, tales que $DE = AB$, $DF = AC$ e o angulo $D <$ angulo A . Queremos demonstrar que $EF < BC$.

Tracemos AK, formando com AB um angulo igual ao angulo D, tomemos AK = DF, logo também



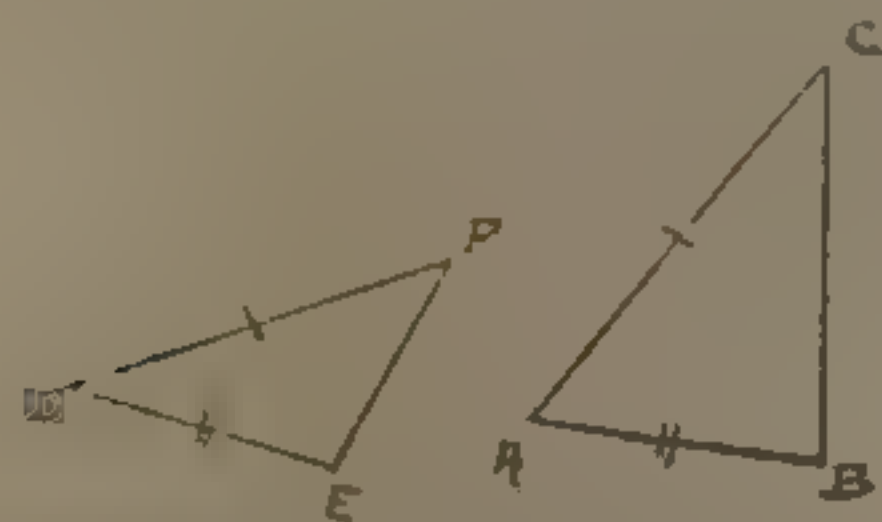
igual a AC. Unindo o ponto B ao ponto K, os dois triangulos ABK e DEF são iguaes, logo $EF = BK$.

Ora, queríamos demonstrar que EF era menor do que BC, basta agora demonstrar que BK é menor do que BC.

Tracemos AV , bissectriz do angulo KAC , e unamos KV . Os dois triangulos VAC e VAK são iguaes, logo $VC = VK$. Mas, no triangulo BVK ,

$$\begin{aligned} BK &< BV + VK \\ \text{ou} \quad BK &< BV + VC \\ \text{ou} \quad BK &< BC \\ \text{ou} \quad EF &< BC \end{aligned}$$

Reciprocamente.— Se dois triangulos têm dois lados respectivamente iguaes, porém o terceiro lado do primeiro menor do que o terceiro lado do segundo, o angulo comprehendido entre os dois primeiros lados do primeiro triangulo será menor do que o angulo comprehendido entre os dois primeiros lados do segundo triangulo.



Sejam os dois triangulos DEF e ABC , taes que $DE = AB$, $DF = AC$ e $EF < BC$.

Se o angulo D for igual ao angulo A , os dois triangulos serão iguaes, e EF seria igual a BC , o que é contra a hypothese.

Se o angulo D for maior do que o angulo A , o lado EF seria maior do que o lado BC , o que ainda é contra a hypothese.

O angulo D não podendo ser nem igual nem maior do que o angulo A , será menor.

3.º caso d'igualdade.— Dois triangulos são iguaes, quando têm seus tres lados respectivamente iguaes.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF , taes que $BA = ED$, $AC = DF$ e $BC = EF$.

Se o angulo A for maior do que o angulo D , o

terceiro lado BC do primeiro triangulo seria menor do que o terceiro lado EF do outro, o que é contra a hypothese.



Se o angulo A fosse maior do que o angulo D , o lado BC seria maior do que o lado EF , o que também é contra a hypothese.

O angulo A , não podendo ser nem maior nem menor do que o angulo D , lhe será igual. E os dois triangulos terão um angulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguaes. Serão, pois, iguaes.

Casos d'igualdade dos triangulos rectangulos
1.º — Dois triangulos rectangulos são iguaes quando têm a hypotenusa igual e um angulo agudo igual.



Sejam os dois triangulos rectangulos ABC e DEF , com as hypotenusas BC e EF iguaes e os angulos B e E iguaes.

Collocando FE sobre CB de modo que F caia em C , e E em B ; os angulos E e B sendo iguaes, os lados ED e BA tomarão a mesma direcção. Ora, os angulos D e A são rectos, e como os pontos F e C coincidem, as perpendiculares FD e CA também coincidirão e D cairá em A . Os triangulos serão, pois, iguaes.

2.º — Dois triangulos rectangulos são iguaes quando têm a hypotenusa igual e um catheto igual.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF , taes que $CB = FE$ e $AB = DE$.

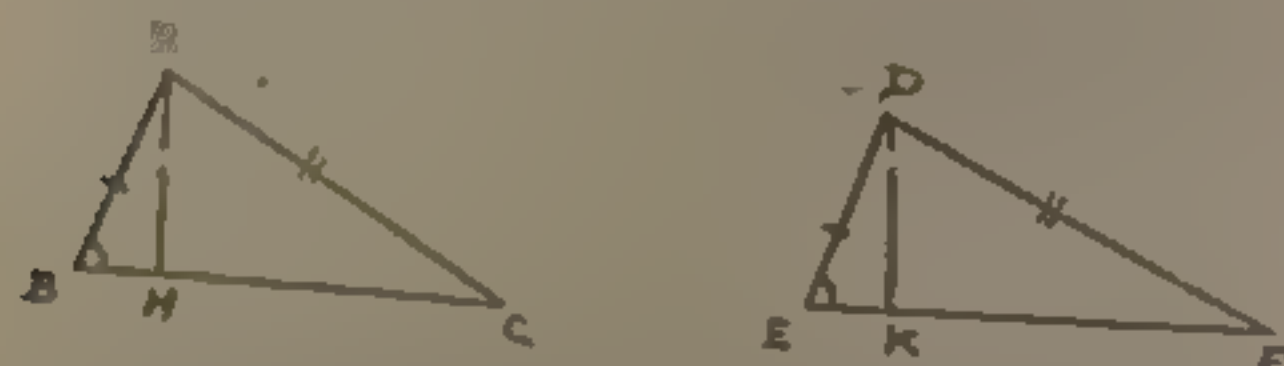
Collocando AB sobre DE , de modo que A caia sobre D , e B sobre E . CA tomará a direcção FD , pois



os angulos em A e em D são rectos, e como $BC = EF$, e podem ser consideradas como duas obliquas iguaes se afastando igualmente do pé da perpendicular, os pontos C e F coincidirão, e os triangulos serão iguaes.

4º caso d'igualdade. — Dois triangulos são iguaes quando têm dois lados respectivamente iguaes e igual o angulo opposto ao maior lado dado.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF taes que $AB = DE$, $AC = DF$ e angulo B = angulo E .



Dos pontos A e D , traço respectivamente as perpendiculares AH e DK . Os dois triangulos rectangulos AHB e DEK têm a hypotenusa igual e um angulo agudo igual, logo os catetos AH e DK iguaes.

$$\begin{aligned} AH &= DK \\ BH &= EK \end{aligned} \quad (1)$$

Da mesma maneira que os dois triangulos rectangulos AHC e DKF também são iguaes, pois, têm a hypotenusa igual e os catetos AH e DK iguaes.

$$HC = KF \quad (2)$$

Adição membro a membro as duas igualdades (1) e (2) resulta

$$\begin{aligned} BH + HC &= EK + KF \\ \text{ou} \quad BC &= EF \end{aligned}$$

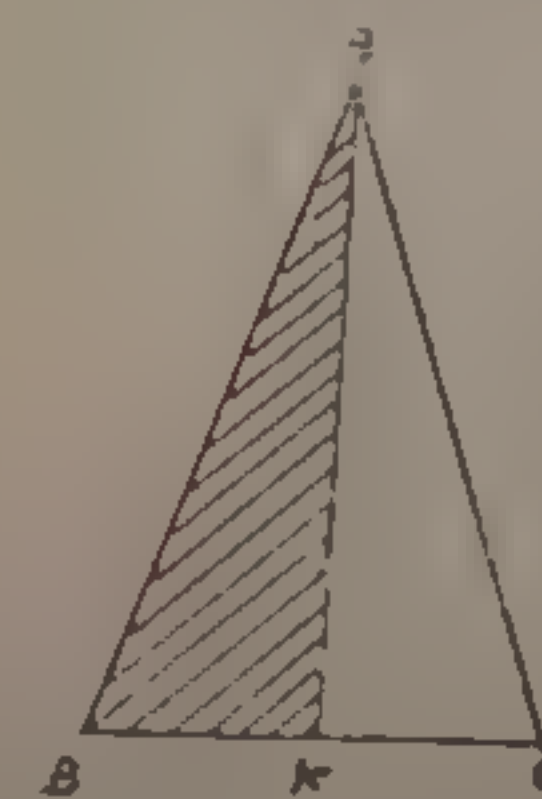
Logo, os dois triangulos ABC e DEF têm os seus tres lados respectivamente iguaes — são iguaes.

Em vez de dar o angulo opposto ao maior lado dado, se tivéssemos dado o angulo opposto ao menor dos lados dados, o problema teria sido incerto.

Mais longe, nos occuparemos detalhadamente d'este caso interessante, conhecido sob o nome de CASO INCERTO. (nos problemas, no fim da 2ª parte)

Theorema II. — Em todo triangulo isocelles, os angulos oppostos aos lados iguaes são iguaes.

Seja o triangulo isocelles ABC , no qual $AB = AC$.



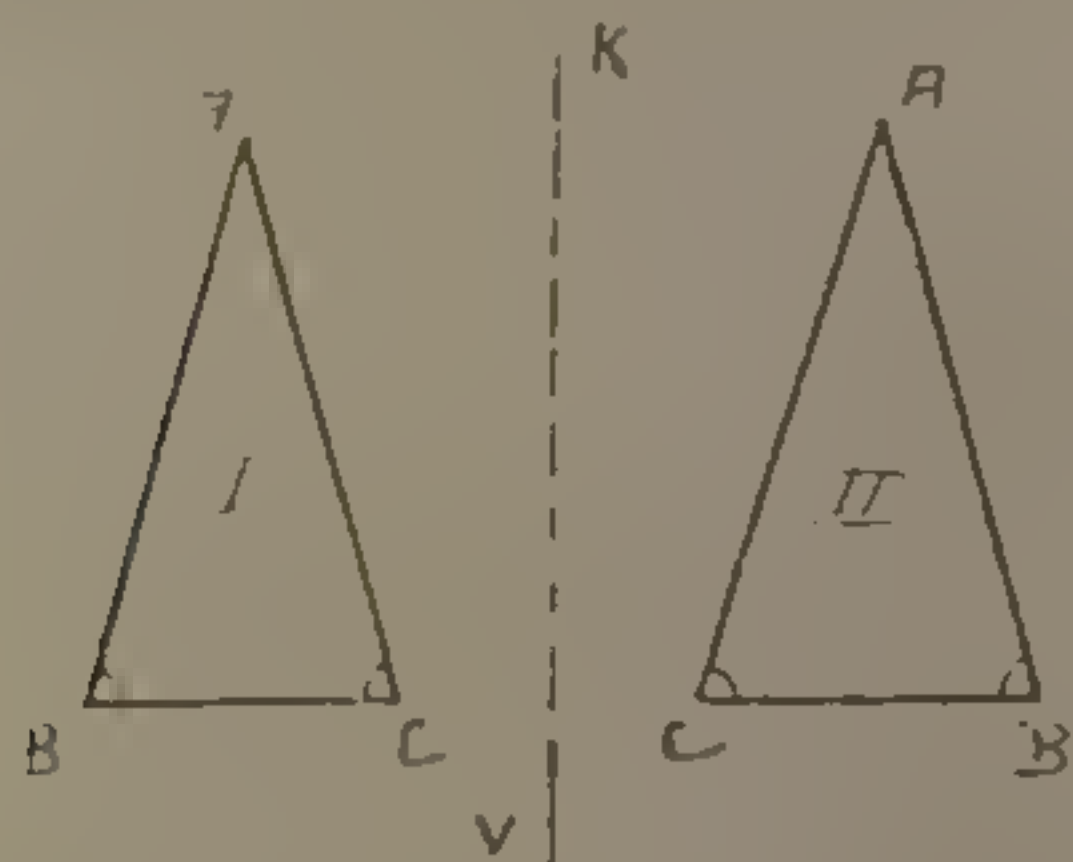
Traçando a perpendicular AK sobre a base, os triangulos rectangulos ABK e ACK têm a hypotenusa igual e um catheto igual, logo elles são iguaes e o angulo B = ao angulo C .

Da igualdade dos triangulos ABK e ACK também deduzimos que $BK = KC$, e que os angulos em A são iguaes.

Logo, no triangulo isocelles, a altura é ao mesmo tempo mediana e bissectriz — qualquer recta que goze de uma destas tres propriedades, também gozará das duas outras.

Reciprocamente. — Se um triangulo tem dois angulos iguaes, os lados oppostos a estes angulos iguaes, são iguaes, e o triangulo é isocelles.

Seja o triângulo ABC , em que o ângulo B \geq ao ângulo C .

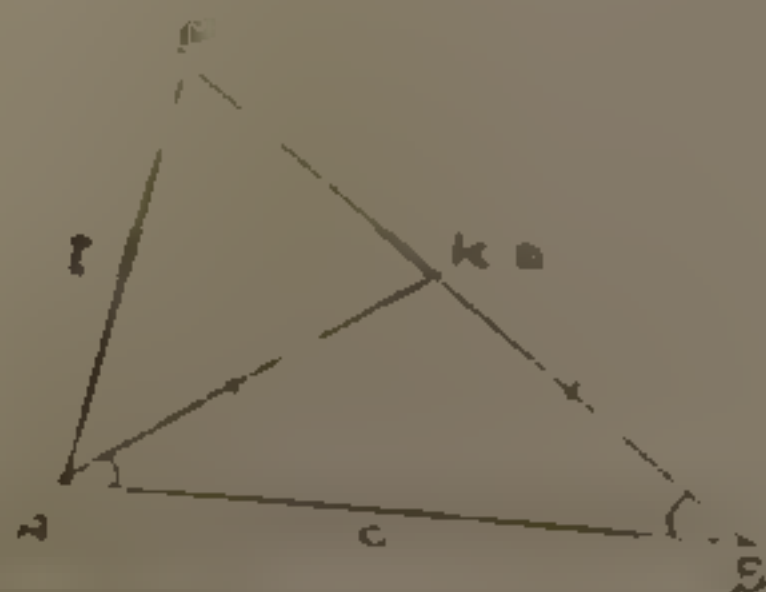


Façamos girar o triângulo dado em torno de um eixo KV de modo a rebatel-o em II. Fazendo escorregar o triângulo ABC sobre o plano, até que B se encontre em C , e C em B , como esses ângulos são iguais, o lado BC tomará a direcção CA , e o lado CA a direcção BA , e os pontos A coincidirão.

Logo, $AB = AC$.

Theorema 12. — N'um triângulo qualquer, a um ângulo oppõe-se um maior lado.

Seja $A > B$ digo que $a > b$.



Logo, $a > b$ ou $AB > AC$ ou $AB > AC$ ou $AB > AC$

Ora,

$$\begin{aligned} AC &< CK + KA \\ AC &< CK + KB \\ AC &< CB \\ b &< a \\ \text{ou} \quad a &> b \end{aligned}$$

Reciprocamente — Em todo triângulo, ao maior lado oppõe-se o maior ângulo (figura precedente).

Si $a > b$ digo que $A > B$. Com effeito, se $A = B$, o triângulo seria isocles e o lado $a = b$, o que é contra a hypothese. Logo A não pôde ser igual a B .

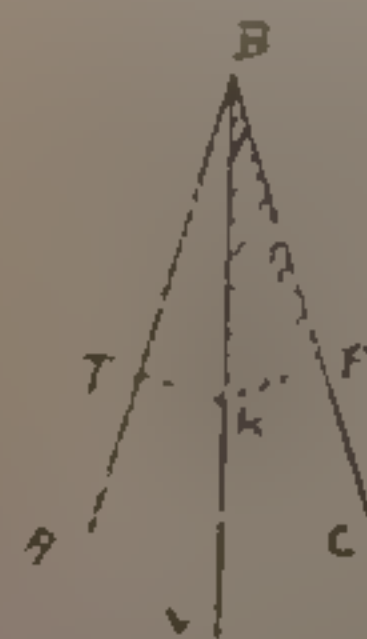
Si $A < B$, o lado a , opposto ao menor ângulo, seria o menor, o que também é contra a hypethese.

Logo A não pôde ser menor do que B .

A não podendo ser nem igual nem menor do que B , só poderá ser maior.

Logo, $A > B$.

Theorema 13. — A bissectriz de um ângulo e o lugar geometrico dos pontos do plano que distam igualmente dos lados do ângulo.



Seja o ângulo B , a bissectriz BV , e um ponto K sobre a bissectriz.

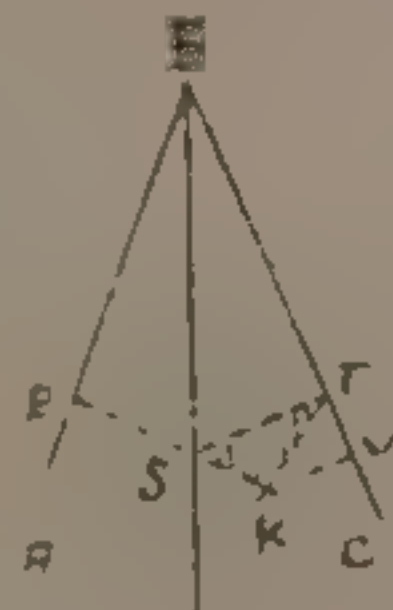
As distancias do ponto K aos lados do ângulo são dadas pelas perpendiculares traçadas de K sobre os lados. KT e KP são as perpendiculares. Logo, $KT = KP$.

Os triângulos rectangulos BKT e BKP têm a hypotenusa commun e os ângulos agudos em B iguaes. Logo, elles são iguaes. KT é, pois, igual a KP .

O ponto K, sendo tomado fóra da bissectriz, não-
 dista igualmente dos lados do angulo.
 KP corta a bissectriz em S, e S
 dista igualmente dos lados do angulo.

$ST = SP$
 Unindo K T, notamos que K V.
 perpendicular, e menor do que K T,
 ou seja,

$KV < KT$
 mas $KT = KS + ST$
 ou $KT = KS + SP$
 ou, a fortiori
 $KV < KP$



Parallelas

Chamamos SECANTE toda recta que corta uma
 figura.

Sejam duas rectas quaesquer A B e C D, cortadas
 pela secante E F.

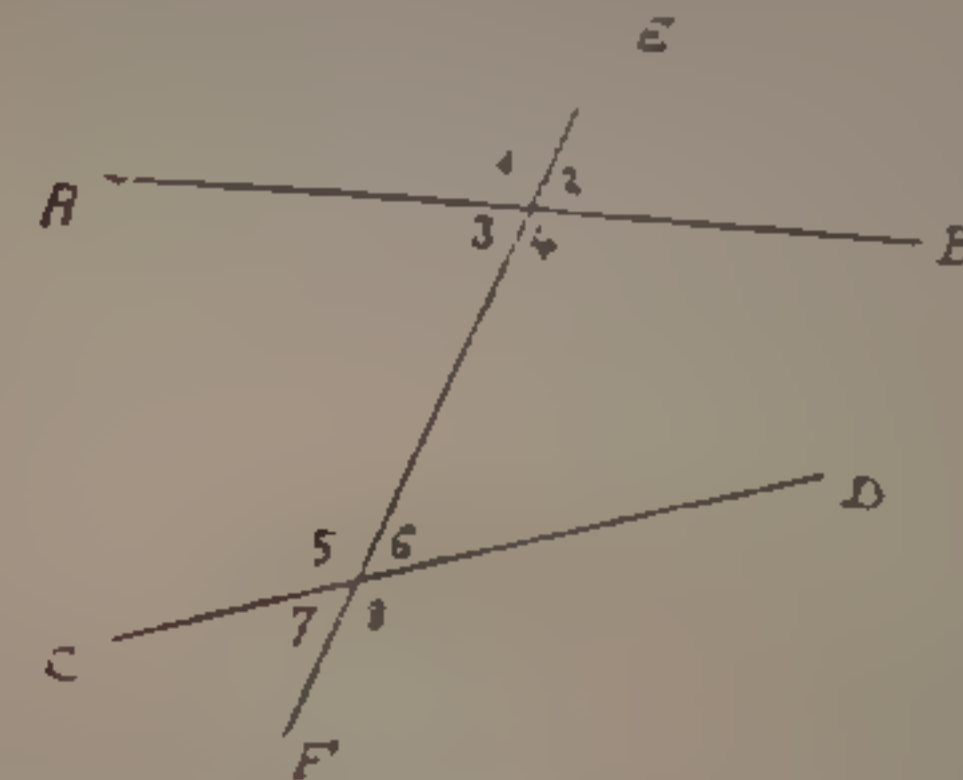


Figura 1.ª

1 e 5 } são alternos-internos

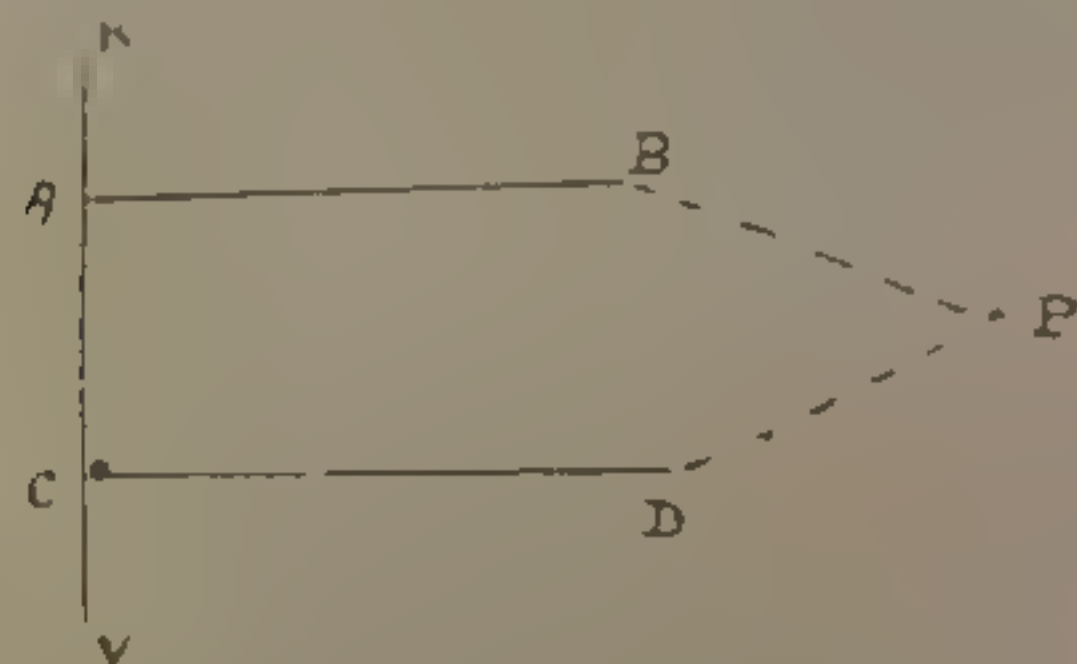
2 e 8 } são alternos-externos.

1 e 6 }
 2 e 5 } são correspondentes.

4 e 3

- 1) são internos do mesmo lado da secante.
 2) são externos do mesmo lado da secante.

Theorema 14. — Duas rectas perpendiculares a uma mesma terceira, são paralelas.
 Sejam as rectas AB e CD , perpendiculares a KV



Se AB e CD se encontrassem num ponto qualquer P , deste ponto poderíamos traçar sobre KV duas perpendiculares, o que é impossível. Logo, o ponto P não pôde existir, as rectas AB e CD não podem encontrar-se; são paralelas.

Postulatum d'Euclides — (Euclides, geometra grego, ensinava em Alexandria, sob o reinado de Ptolemeu, e a obra que escreveu, os **ELEMENTOS**, que constituem, por assim dizer, a base da geometria plana.)

Euclides pede que se admitta como evidente, que, por um ponto, se pôde traçar uma paralela a uma recta, e uma só.

Theorema 15. — Se duas rectas AB e CD são

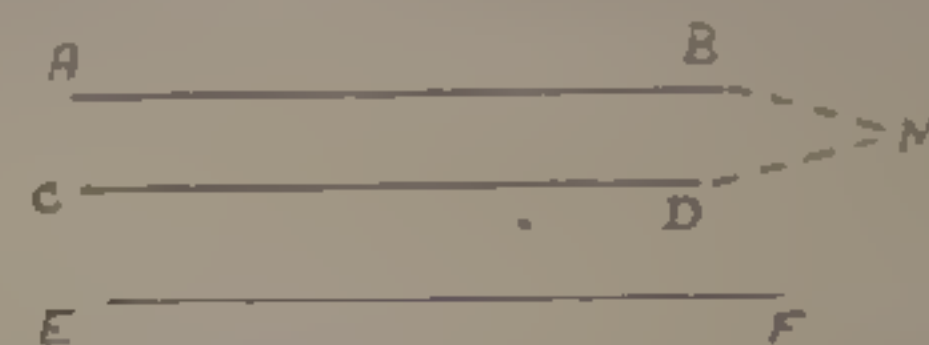
paralelas, toda recta AE que corte uma della, também cortará a outra.

Seja AB e CD duas paralelas, e supponhamos AE cortando AB , digo que também cortará CD .



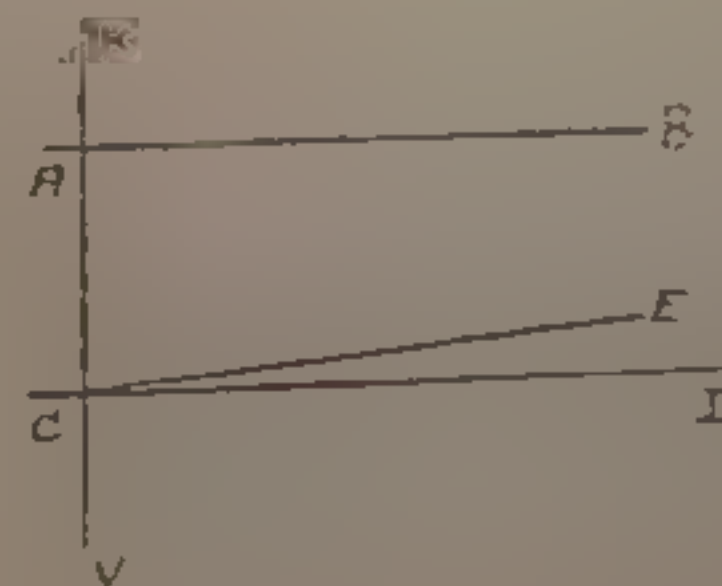
Se AE não cortasse CD seria paralela a CD , e por A haveria duas paralelas a CD , o que é impossível.

Theorema 16. — Duas rectas AB e CD paralelas a uma terceira EF , são paralelas entre si.



Porque, se as rectas AB e CD se encontrassem em um ponto M , poder-se-hia por esse ponto traçar duas paralelas a EF .

Theorema 17. Se duas rectas são paralelas, toda recta perpendicular a uma, é perpendicular a outra.



perpendicular a outra.

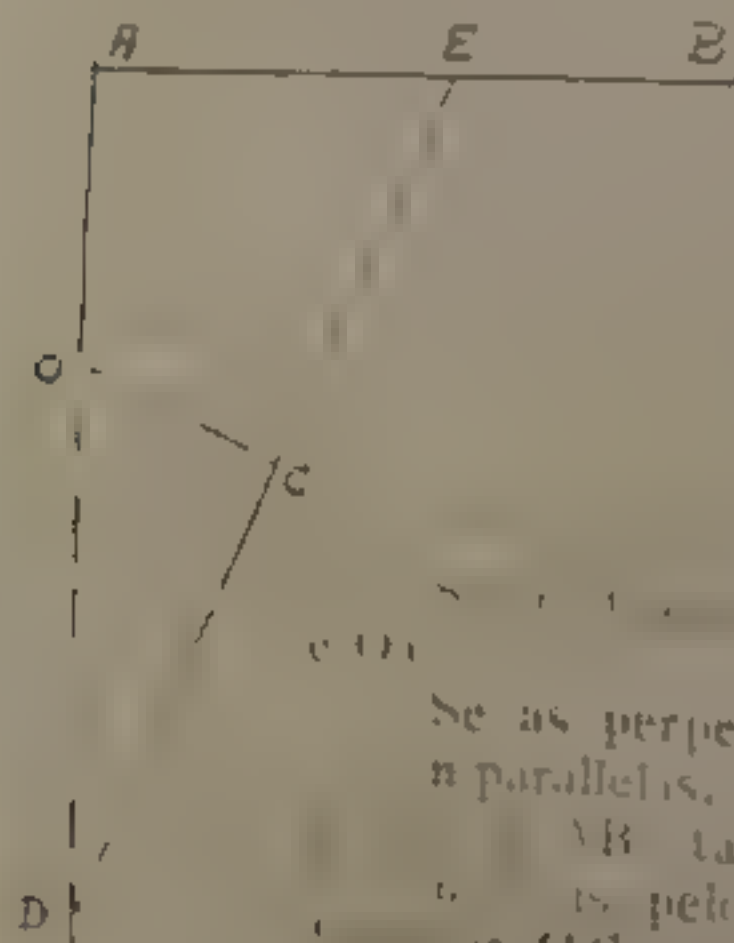
Sejam duas rectas AB e CD paralelas, e KV perpendicular a AB . Vamos traçar que KV também é perpendicular a CD .

Supponhamos que

CD não fosse perpendicular a KV, e que a perpendicular fosse CE.

AB e CE sendo todas as duas perpendiculares a uma mesma terceira KV, são paralelas — Ora, por hypothese, AB e CD são paralelas — Como pelo ponto C só se pôde traçar uma paralela a AB, concluímos que CD coincide CE, e como, por construção, CE é perpendicular a KV, CD também o será.

Theorema 18. — As perpendiculares, traçadas sobre duas rectas concorrentes, são concorrentes.

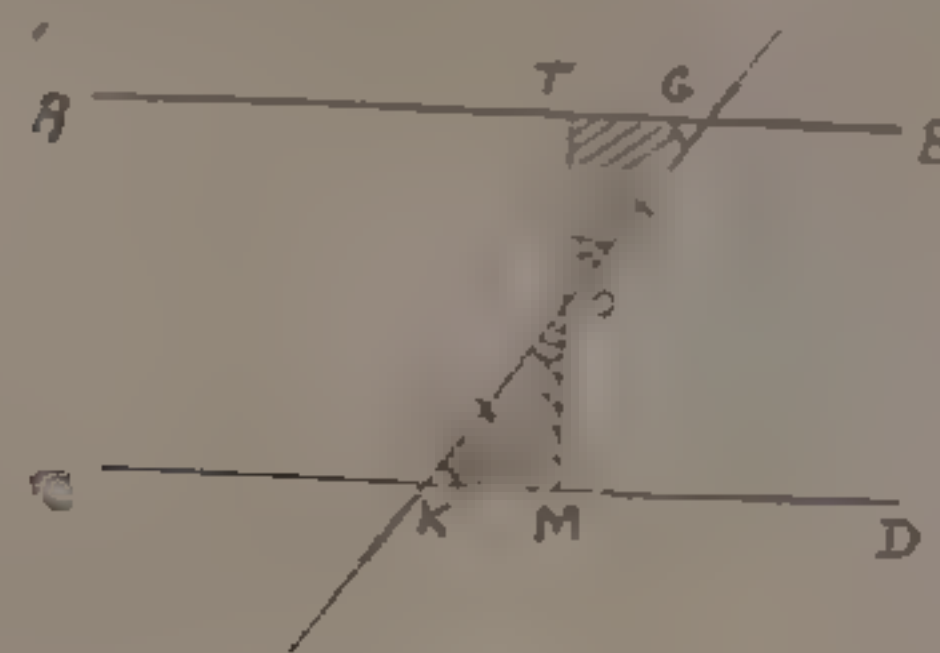


Se as perpendiculares AB e CE são paralelas, a recta AOD perpendicular a AB também o seria a DCE: mas, pelo ponto O, duas perpendiculares, OC e OD, a uma mesma recta CD, o que é impossível.

Theorema 19.

Se duas rectas são paralelas, os ângulos correspondentes iguaes, ou ângulos alternos iguaes, ou ângulos internos do mesmo lado da secante supplementares.

mentares, e ângulos externos do mesmo lado da secante supplementares.



Sejam as paralelas AB e CD cortadas pela secante GK.

Tomemos o meio O de GK, e tracemos TM perpendicular common a AB e a CD.

Os dois triangulos rectangulos TOG e KOM têm os ângulos O iguaes, por serem oppostos pelo vertice, e as hypotenusas OG e OK iguaes, por construção: então, são iguaes, e seus elementos são respectivamente iguaes: logo os ângulos em K e em G, alternos-internos, são iguaes.

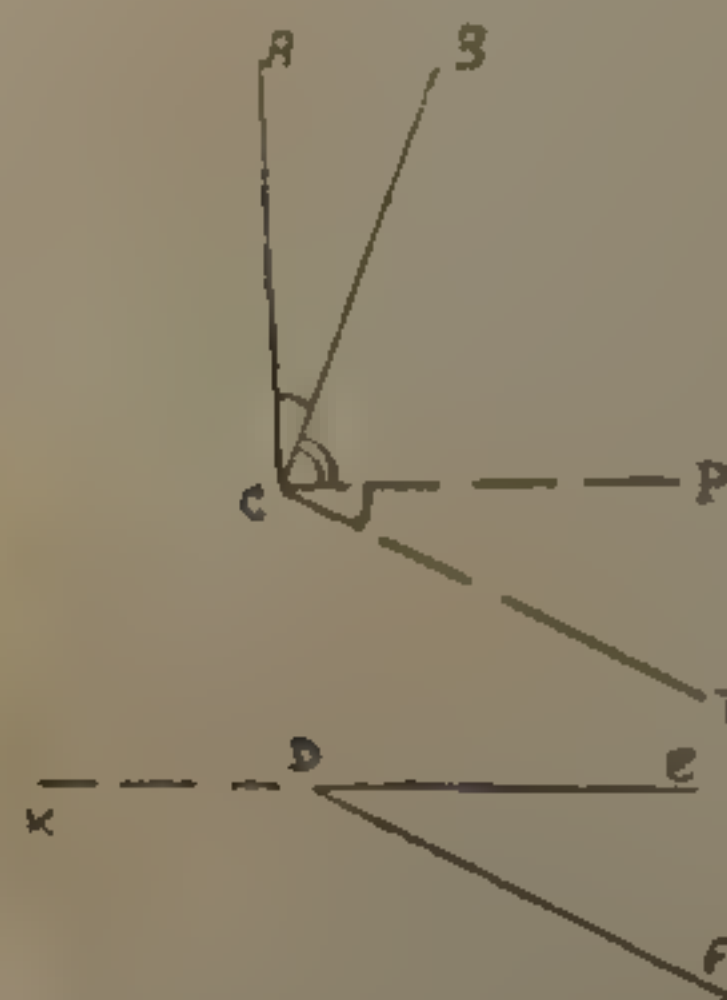
D'ahi deduz-se facilmente que os ângulos alternos-externos são iguaes, que os ângulos correspondentes são iguaes, que os ângulos internos do mesmo lado da secante são supplementares e que os ângulos externos do mesmo lado da secante são supplementares.

Reciprocamente. — Se, duas rectas AB e CD,

os ângulos correspondentes iguaes, ou ângulos alternos iguaes, ou ângulos internos do mesmo lado da secante supplementares, ou

Considerando os ângulos ABC e DEV , com os lados respectivamente paralelos, porém dirigidos em sentido contrario, notamos que VED é o suplemento de ABC . Os ângulos ABC e DEV , que têm seus lados respectivamente paralelos e dirigidos em sentido contrario, são, pois, suplementares.

Theorema 22 — Se dois ângulos têm seus lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido, elles são iguaes — se os lados respectivamente perpendiculares são dirigidos em sentido contrario, elles são suplementares.



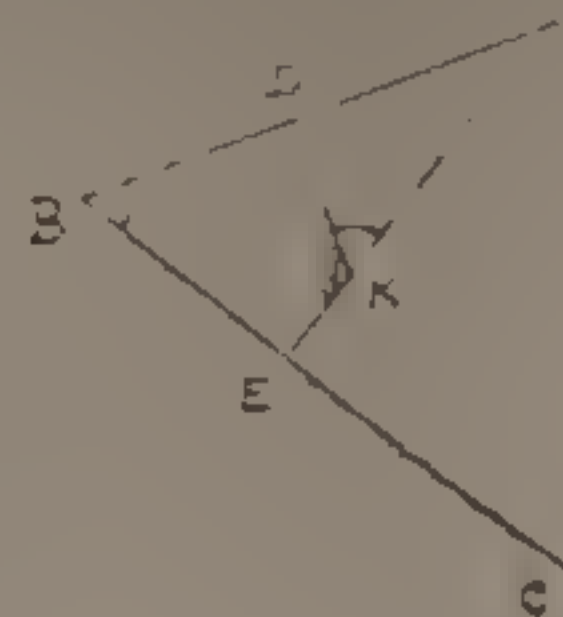
Sejam os ângulos ACB e EDF com os lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido.

Pelo ponto C , traço CP perpendicular a CA , logo, paralela a DE ; traço CT , perpendicular a BC , logo, paralela a DF . Os ângulos PCT e EDF são iguaes, pelo theorema precedente. Notando que ACB e PCT têm o mesmo complemento BCP , concluímos que ACB e EDF são iguaes.

ACB e KDF , que têm os lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido, são iguaes. Pois, KDF , suplemento de EDF , também o será de seu igual ACB .

Theorema 23 — Sejam K , tomado entre os

lados d'um ângulo, traçando perpendiculares sobre os lados d'este ângulo, formamos um ângulo DKE sup-

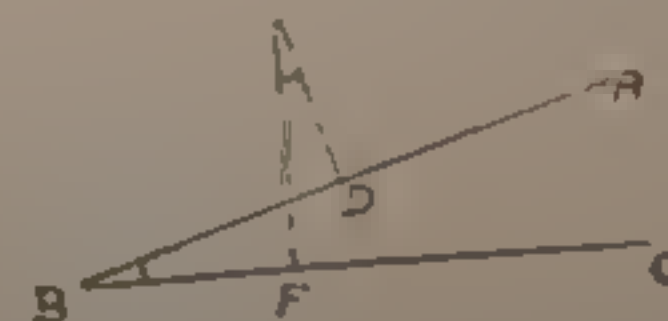


plemento do ângulo dado ABC .

Com effeito, prolongando EK , constatamos que os ângulos DKA e ABC têm os lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido, logo são iguaes.

Então, DKE suplemento de DKA , também o será de ABC .

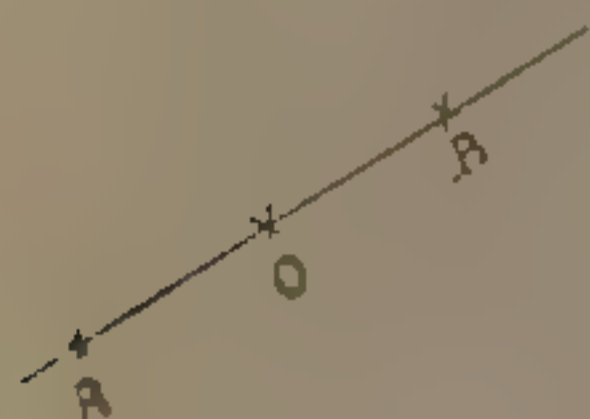
Se tivéssemos tomado o ponto K fora do ângulo ABC , teríamos obtido dois ângulos, FKD e



ABC , iguaes, pois, os seus lados são respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido.

Symetria

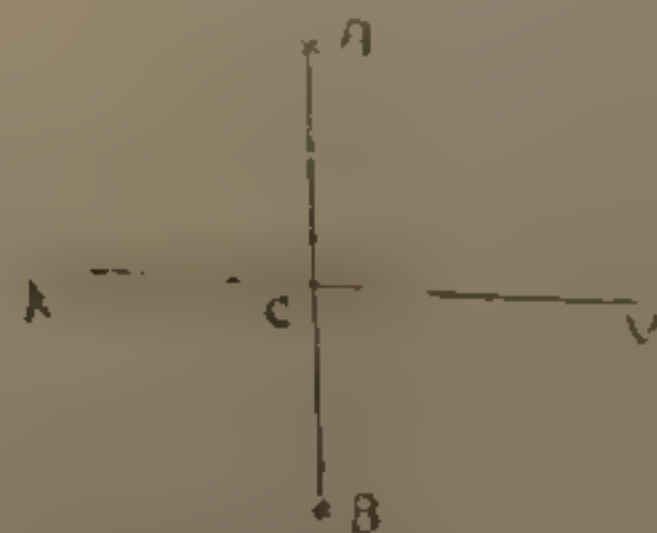
Diz-se que dois pontos A e B são symetricos em relação a um ponto O, quando este ponto divide a recta AB em duas partes iguaes.



Duas figuras são symetricas em relação a um ponto, quando seus pontos são dois a dois symetricos em relação a esse ponto, que se denomina CENTRO DE SYMETRIA.

O ponto de encontro das diagonaes de um parallelogrammo é um centro de symetria.

Diz-se que dois pontos A e B são symetricos em relação a uma recta KV, quando AB é perpendicular sobre KV e é dividida no ponto C, onde encontra KV, em duas partes iguaes.



Dias figuras são symetricas, em relação a uma recta, quando seus pontos são dois a dois symetricos, em relação a esta recta, que se denomina EIXO DE SYMETRIA.

Theorema 24 — 1) Figuras symetricas são iguaes.
2) Se duas figuras são symetricas, basta fazer uma d'ellas girar de um angulo de 180°, para se obter a outra.

Em relação a um eixo de symetria basta fazer girar a figura de 180°.

Quando uma figura plana tem dois eixos de symetria perpendiculares um ao outro, o ponto de intersecção d'este dois eixos é o centro de symetria da figura.

Como exemplo, temos o losango.

Translação—de uma figura n'um plano, é sua passagem para outro logar do plano, porém, todos os seus pontos movem-se parallelamente a uma direcção determinada e os percursos de todos os pontos sobre suas respectivas parallelas são iguaes.

Em outros termos, diz-se que uma figura plana de forma invariavel é animada d'um movimento de translação no seu plano, quando se desloca neste plano, de tal modo que cada um de seus lados fique constantemente parallello á sua posição primitiva. Nesse movimento, os pontos da figura descrevem rectas iguaes e parallelas.

Polygonos

Polygonos EQUILATEROS são os que têm os lados iguaes.

Polygonos EQUIANGULOS são os que têm os angulos iguaes.

Dois polygonos são equilateros entre si, quando têm os lados respectivamente iguaes, e collocados na mesma ordem, isto é, seguindo os seus contornos, no mesmo sentido, o primeiro lado de um é igual ao primeiro lado do outro, o segundo lado de um é igual ao segundo lado do outro, e assim por diante.

D'um modo analogo, dois polygonos são equi-angulos entre si, quando os seus angulos são respectivamente iguaes.

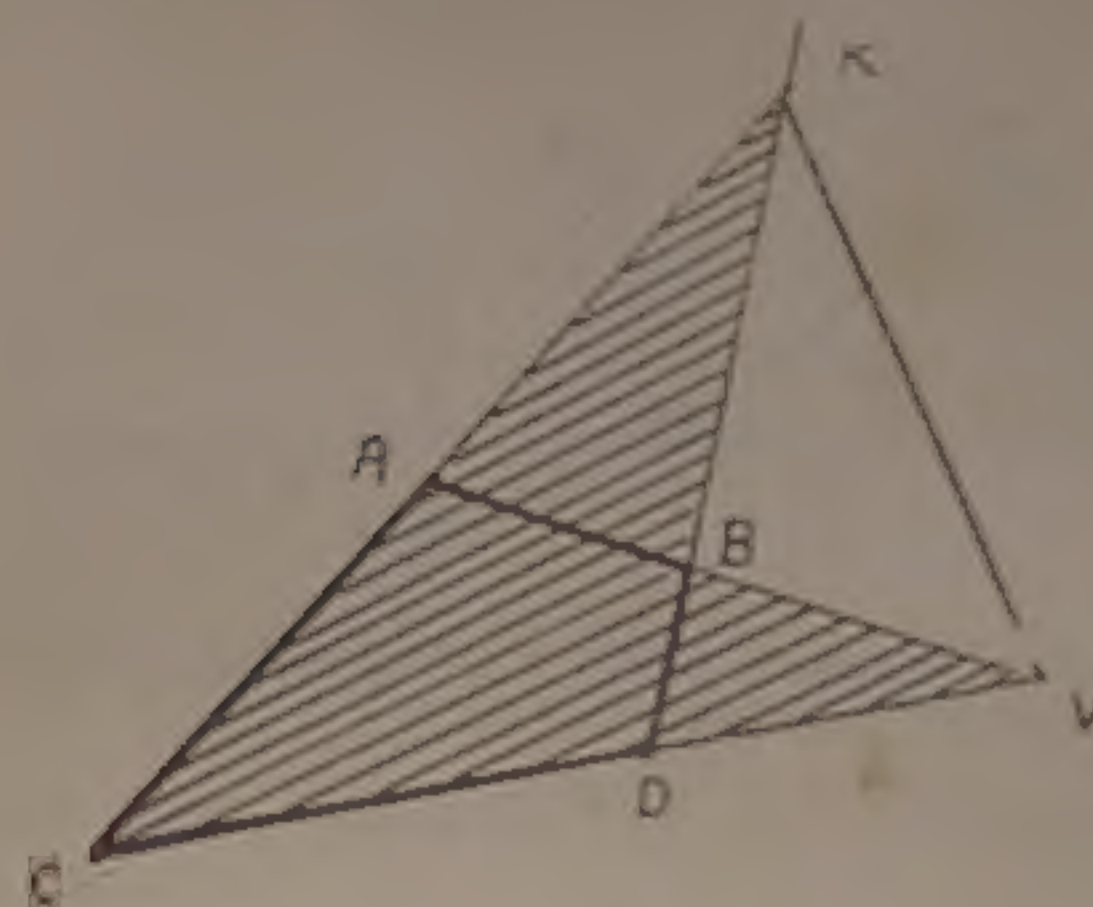
Polygonos REGULARES são os que têm os lados iguaes e os angulos iguaes.

Chama-se DIAGONAL toda recta que une os vertices de dois angulos não adjacentes.

Chama-se QUADRILATERO COMPLETO a figura que se obtem depois de prolongar os lados oppostos de um quadrilatero: unindo os pontos de encontro dos lados oppostos prolongados obtem-se a TERCEIRA DIAGONAL.

Seja $AEDC$ um quadrilatero: prolongo os lados oppostos até que se encontrem em K e em V . KV

é a terceira diagonal, e a figura $KACDVBK$ é um quadrilatero completo.



Perimetro — de um polygono, é a somma de seus lados

Podemos classificar os polygonos relativamente ao numero de seus lados,

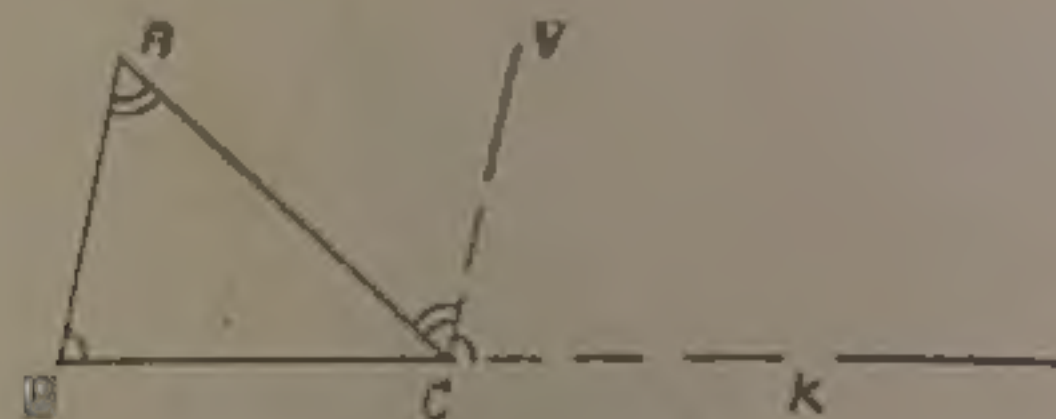
O mais simples é o triangulo, que tem tres lados, como já vimos.

Depois vem o quadrilatero, com quatro lados;

o pentagono, com cinco,
o hexagono, com seis,
o heptagono, com sete,
o octagono, com oito,
o enneagono, com nove,
o decagono, com dez,
o hendecagono, com onze,
o dodecagono, com doze,
o pentadecagono, com quinze,
o icosagono, com vinte.

Os polygonos de 13, 14, ..., 17, ..., 23, ... lados não têm nomes particulares; diz-se um polygono de treze lados, um polygono de cinquenta e sete lados, etc.

Theorema 25—A somma dos angulos de um triangulo vale sempre dois rectos. (Lei angular de THALES).



Seja o triangulo ABC. Prolonguemos o lado BC e tracemos CV parallela a BA.

Os angulos B e VCK são iguaes, como correspondentes.

Os angulos A e ACV são iguaes, como alternos-internos. A somma dos angulos em C do mesmo lado de BK, perfazendo dois rectos, e esses angulo sendo respectivamente iguaes aos angulos do triangulo, concluímos que a somma dos angulos do triangulo tambem vale dois rectos.

Cada angulo de um triangulo é o supplemento da somma dos dois outros.

Si dois triangulos têm dois angulos respectivamente iguaes, o terceiro angulo do primeiro triangulo será igual ao terceiro angulo do segundo triangulo.

O angulo exterior ACK é igual á somma dos angulos interiores não adjacentes do triangulo.

Um triangulo qualquer tem sempre pelo menos dois angulos agudos.

Os dois angulos agudos d'um triangulo rectangulo são complementares.

Cada angulo de um triangulo equilatero vale os dois terços de um angulo recto — (60 grãos).

Theorema 26—A somma dos angulos de um poligono qualquer, vale tantas vezes dois angulos rectos quantos são os lados menos dois.



Um poligono tendo n lados, podemos traçar por cada vertice $n - 3$ diagonaes, e podemos decompor-o em $n - 2$ triangulos.

O numero total de diagonaes de um poligono de n lados é dado pela formula :

$$\frac{(n-3) \cdot n}{2}$$

A somma de todos os angulos componentes dos triangulos,

sendo igual a somma dos angulos do poligono, essa somma será $(n - 2)$ vezes 2 rectos, ou $2n - 4$.

Chama-se **ANGULO EXTERIOR** de um poligono, o angulo formado por um lado e o prolongamento do lado adjacente.

Em cada vertice de um poligono, a somma do angulo interior e do angulo exterior perfaz 2 rectos. Se o poligono tem n lados, tambem terá n vertices, e a somma de todos os seus angulos interiores e exteriores será

$$2n$$

Se desta somma, subtrahimos a somma dos angulos interiores, que é $2n - 4$, achamos

$$2n - (2n - 4) = 2n - 2n + 4 = 4$$

Logo, a somma dos angulos exteriores de um poligono vale sempre 4 rectos.

Quadrilateros. — Entre o quadrilatero, os mais interessantes são :

o **PARALLELOGRAMMO**, que tem os lados oppostos parallelos.

e **RECTANGULO**, que é um parallelogrammo com seus angulos rectos.

o **LOSANGO**, que é um parallelogramo com os quatro lados iguaes.

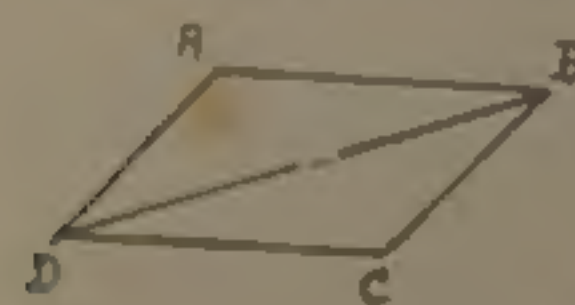
o **QUADRADO**, que tem os quatro lados iguaes e os quatro angulos rectos.

Ainda podemos citar o **TRAPEZIO**, quadrilatero que tem dois lados parallellos e dois não parallellos

O trapezio que tem os lados não parallellos iguaes, é um **TRAPEZIO ISOCÉLES**.

O trapezio que tem um dos lados não parallellos, perpendicular aos lados parallellos, é um **TRAPEZIO RECTANGULO**.

Theorema 27— Os lados oppostos de um parallelogramo são iguaes, bem como os angulos oppostos.



Basta para isso traçar a diagonal DB. A igualdade dos triangulos ABD e BDC resolve a questão.

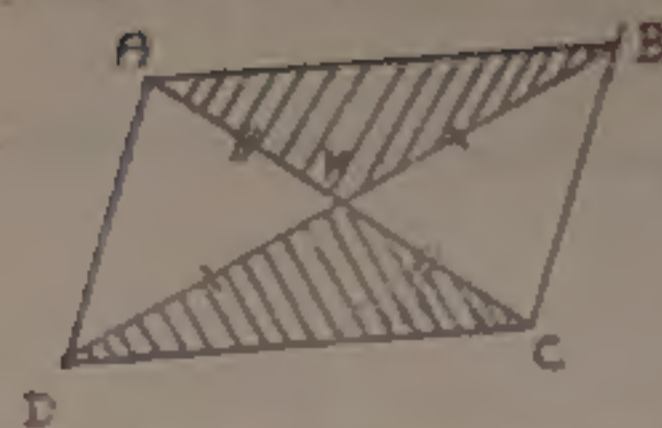
Theorema 28— Todo quadrilatero que tem seus lados oppostos iguaes, é um parallelogramo.

Theorema 29— Todo quadrilatero, que tem seus angulos oppostos iguaes, é um parallelogramo.



$$\begin{aligned} A &= B \\ C &= D \\ A + B + C + D &= 4 \text{ rectos} \\ 2A + 2D &= 4 \text{ rectos} \\ A + D &= 2 \text{ rectos} \end{aligned}$$

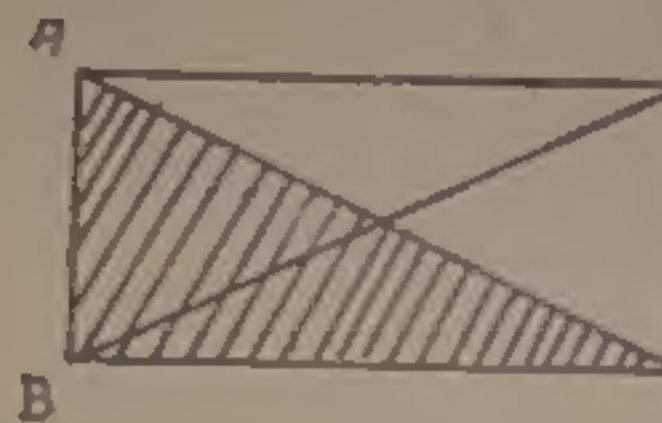
Ora, os angulos A e D são internos do mesmo lado da secante: logo os lados AC e DB são parallellos, e a figura é um parallelogramo.



Theorema 30— Todo quadrilatero que tem dois lados oppostos iguaes e parallellos é um parallelogramo.

Theorema 31— As diagonaes de um parallelogramo se cortam ao meio.

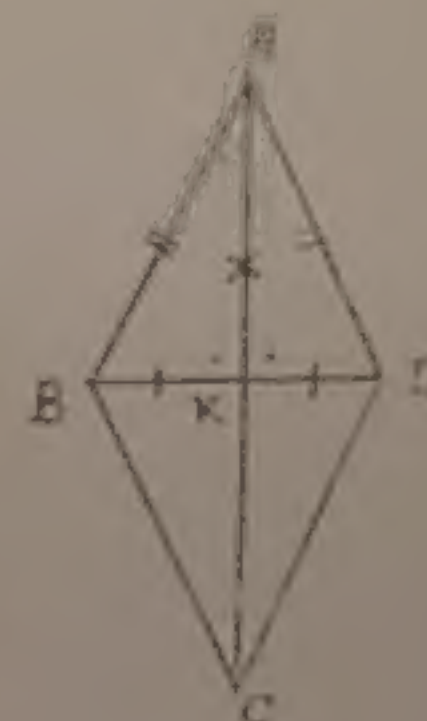
Deduz-se da igualdade dos triangulos AKB e DKC.



Theorema 32— As diagonaes do rectangulo são iguaes.

Deduz-se da igualdade dos triangulos rectangulos, CAB e BDC.

Theorema 33— As diagonaes do losango são orthogonaes.



Deduz-se da igualdade dos triangulos BAK e DAK.

As diagonaes do quadrado cortam-se ao meio,
são iguaes e são orthogonaes.

Porque o quadrado é parallelogrammo, é rectan-
gulo e é losango

2ª PARTE